250.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Միրումյան Մխիթար Բախշիի

ԴԱՇՏԻ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԵՎ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅՈՒՄ ՆՈՐ ԻՆՏԵԳՐՎՈՂ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԵՎ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ

Ա 04.02 - «Տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2002

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Мирумян Мхитар Бахшиевич

Построение и исследование новых интегрируемых моделей в квантовой теории поля и статистической физике

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.04.02 – “Теоретическая физика”

ЕРЕВАН 2002

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար	Ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու Դ. Ռ. Կարախանյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ	Ֆիզմաթ. գիտությունների դոկտոր Մ. Էլիաշվիլի (Թբիլիսի) Ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու Տ. Ս. Հակոբյան (ԵրՖԻ)
Առաջատար կազմակերպություն	Լ. Դ. Լանդաուի անվան Տեսական ֆիզիկայի ինստիտուտ, Մոսկվա

Պաշտպանությունը կայանալու է "18" հունիսի 2002թ. ժամը 11.00 –ին Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտում գործող ԲՈՀ-ի 024 մասնագիտական խորհրդում (Երևան, Ալիխանյան եղբայրների փ. 2):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵրՖԻ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է "17" մայիսի 2002թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտքարտուղար Ա. Թ. Մարգարյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском физическом институте

Научный руководитель	Кандидат физ.-мат. наук Д. Р. Караханян
Официальные оппоненты	Доктор физ.-мат. наук, Элиашвили М. (Тбилиси) кандидат физ.-мат. наук Акопян Т. С. (ЕрФИ)
Ведущая организация	Интститут теоретической физики им Л. Д. Ландау, Москва

Защита состоится "18" июня 2002 г. в 11.00 часов на заседании специализированного совета ВАК 024 в Ереванском физическом институте (Ереван, ул. Братьев Алиханян 2)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрФИ.

Автореферат разослан "17" мая 2002 г.

Ученый секретарь спец. совета А. Т. Маргарян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория интегрируемых нелинейных систем вызывает стабильно высокий интерес физиков-теоретиков в течение многих дестятилетий. Это связано с тем, что несмотря на грандиозный успех приближенных методов (таких как теория возмущений, метод среднего поля и вариационный метод) в теоретической физике, существует множество задач, где необходимо исследовать непертурбативное поведение систем. В подобных задачах, восновном, применяется квантовый метод обратной задачи рассеяния (***КМОЗР***). Первая интегрируемая система в теоретичекой физике связана с именем Вернера Гейзенберга, котрорый в теории магнетизма ввел в рассмотрение цепочку N частиц со спином $1/2$ и антиферромагнитным взаимодействием между ближайшими соседами, которая сейчас известна в современной литературе как "модель Гейзенберга". Точное решение уравнения Шредингера для XXZ модели Гейзенберга впервые было найдено Гансом Бете в *1931* году в работе [1]. Он решил задачу с помощью подстановки, носящей сейчас его имя (анзатц Бете). Впоследствии этот метод был развит в мощный формализм ***КМОЗР*** или алгебраический анзатц Бете (***ААБ***).

Работа Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [2], где они нашли нелинейную замену переменных в уравнении Кортевега-де Фриза, после которой оно сводится к явно решаемой линейной системе, положила начало нового этапа в развитии метода обратной задачи рассеяния (***МОЗР*** классического варианта ***КМОЗР***). Уравнение Кортевега-де Фриза при этом условием совместимости этой линейной задачи. В дальнейшем было показано, что все известные точнорешаемые нелинейные задачи могут быть представлены в виде условия интегрируемости некоторой линейной проблемы. Затем Лакс в работе [3] формализовал результаты Гарднера, Грина, Крускала и Миуры и ввел понятие L-A-пары для уравнения Кортевега - де Фриза. В работе [4] Захаров и Шабат показали, что понятие L-A-пары Лакса не является свойством присущим теории уравнения Кортевега-де Фриза и применили его к нелинейному уравнению Шредингера. Затем Захаров и Фаддеев в работе [5] показали, что интегрируемая модель Кортевега-де Фриза обладает гамильтоновой структурой. Впоследствии выяснилось, что большинство интегрируемых систем обладает гамильтоновой структурой [6]. При этом, преобразования *МОЗР* могут быть интерпретированы как канонические преобразования в фазовом пространтсве модели, а переменные, в которых исходное нелинейное уравнение линеаризуется – как переменные действие-угол. Иначе говоря, на классическом уровне интегрируемость системы эквивалентна существованию представления нулевой кривизны, т. е. L-A- пары Лакса.

На квантовом уровне интегрируемость обеспечивается соотношениями Янга-Бэкстера [7], которые обеспечивают существование бесконечного числа инволютивных интегралов движения. Одна из основных задач *КМОЗР* является задача об извлечении из упомянутого бесконечного набора интегралов движений локальных интегралов. В квантовой теории поля соотношения Янга-Бэкстера, как показал А. Замолодчиков в работе [8], имеют место для S-матрицы рассеяния (в двумерной теории поля) и выступают в качестве условий факторизуемости матрицы рассеяния. ***КМОЗР*** в основном был развит в применении к спиновой модели Гейзенберга.

Основной объект ***КМОЗР*** – это R-марица, действующая на тензорном произведении квантового и вспомогательного пространств, которая удовлетворяет соотношениям Янга-Бэкстера. Оказывается соотношения, аналогичные к соотношениям Янга-Бэкстера, выполняются для квазитреугольных алгебр Хопфа. Этот факт позволяет использовать соотношения Янга-Бэкстера для построения новых интегрируемых моделей путем решения этих соотношений. Симметриями квантовых интегрируемых систем являются квантовые группы. А квантовое и вспомогательное пространства - неприводимые представления соответствующей квантовой группы.

В диссертации методом нахождения новых решений соотношений Янга-Бэкстера построены некоторые новые интегрируемые модели. В последние годы был развит новый метод построения интегрируемых моделей методом решения чередующихся уравнений Янга-Бэкстера [9,10]. Таким путем получается неоднородная интегрируемая модель.

Квантовый метод обратной задачи рассеяния широко применяется в теории солитонов, в теории интегрируемых эволюционных уравнений, в физике плазмы, в физике конденсированных сред, статистической физике, генетике и во многих других областях естествознания.

б) ***Целью диссертационной работы является*** построение и исследование новых интегрируемых моделей в квантовой теории поля и статистической физике методом обратной задачи рассеяния, а также получение решений соотношений Янга-Бэкстера обладающих определенными свойствами симметрии (некомпактная модель Гейзенберга) и фермионизация известных спиновых решеточных моделей (на примере модели Уймина-Лая-Сазерлэнда).

в) ***Научная новизна.***

1. Найдено локальное проебразование, альтернативное к преобразованию Йордана-Вигнера, для перехода от спиновых операторов к фермионным операторам рождения и уничтожения и обратно. Посредством этого преобразования построена фермионная модель Уймина-Лая-Сазерлэнда спина *1*. Получены явные выражения для операторов Хаббарда, перестановки и Лакса, имеющие важное значение для применения ***КМОЗР***. Получен гамильтониан исследуемой модели и для спина *1* методом Бете найдены собственные векторы трансфер-матрицы и энергетический спектр модели.
2. Построено некомпактное представление алгебры $sl_q(2)$ в функциональном пространстве, определено коумножение в алгебре $sl_q(2)$, посредством которого определяется действие этой алгебры на тензорном произведении двух произвольных представлений. Рассмотрен универсальный R - оператор (связывающий два произвольных представления алгебры $sl_q(2)$) и из требования симметрии соответсвующего уравнения Янга-Бэкстера получены ограничения на универсальный $\boldsymbol{R}$ - оператор к рекурентному соотношению на собственные значения $\boldsymbol{R}$ - матрицы в случае $\boldsymbol{q}$-деформированной симметрии.

3. Универсальный *R*-оператор представлен в виде интегрального оператора, получены дифференциальные уравнения на его ядро, решением которых найдено явное выражение для искомого ядра. Обобщено понятие бета интегралов Эйлера на деформированный случай.
4. Методом чередующихся уравнений Янга-Бэкстера обобщена известная анизотропная *XYZ* модель Гейзенберга, получен гамильтониан этой модели, описывающийвзаимодействие ближайщиж соседей. Члены ответственные за последный тип взаимодействия являются топологическими.

г) ***Практическая ценность работы.***

1. Аналитические формулы, полученные для спиновых моделей с взаимодействиями на решетках, могут быть использованы для описания соответствующих моделей в квантовой теории твердого тела и анизотропных магнетиков.
2. Известно, что в теории струн мировая поверхность двумерна, что позволяет применить развитый формализм к квантовым полям на мировой поверхности струн.
3. Рассмотренная некомпактная цепочка Гейзенберга со спинами реализующими бесконечномерное представление квантовой группы $sl_q(2)$ может быть использована для исследований высокоэнергетических процессов в КХД.

д) ***Научные положения выносимые на защиту.***

1. Существование альтернативного к преобразованию Йордана-Вигнера локального преобразования для перехода от спиновых операторов к операторам рождения и уничтожения фермионов.
2. Построена фермионная модель Уймина-Лая-Сазерлэнда для произвольного спина. Для спинов *1* и *3/2* алгебраическим анзацем Бете найден гамильтониан и энергетический спектр модели.
3. Показано, что фермионная модель Уймина-Лая-Сазерлэнда для спина *1* совпадает с суперсимметричной моделью *t-J* .
4. Сформулирована спиновая решеточная модель Гейзенберга с взаимодействием спинов реализующих некомпактные представления алгебр ***sl(2)*** и $sl_q(2)$. Построены бесконечномерные представления произвольного спина алгебр ***sl(2)*** и $sl_q(2)$ в пространстве полиномов.
5. Для алгебры $sl_q(2)$ уравнения Янга-Бэкстера написаны в терминах коумножения. Соотношения Янга-Бэкстера могут быть интерпретированы как условие коммутативности ***R***-оператора с операцией коумножения, зависящей от спектрального параметра: $R(u)\Delta_u = \bar{\Delta}_u R(u)$.
6. Универсальный ***R***-оператор представлен в виде интегрального оператора. Найдены дифференциальные уравнения для ядра универасльного ***R***-оператора. Известные бета итегралы Эйлера обобщены на ***q***-деформированный случай.
7. Построена анизотропная ***XYZ*** решетка Гейзенберга с чередующимся расположением *R*-матриц. Решены уравнения Янга-Бэкстера, найден гамильтониан модели и показано, что в гамилтониане имеются взаимодействия топологического характера. Показано, что в пределе цилиндрической симметрии гамильтониан совпадает с гамильтонианом лестничного типа, соответствуюшим чередующейся ***XXZ*** цепочке Гейзенберга.

е) ***Апробация работы.***

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на конференциях (ЕрГУ 1999, 2001 и НорАмберд 2001) а также на семинарах в Ереванском физическом институте.

ж) ***Публикации.***

По теме диссертационной работы опубликовано 4 научные работы, одна находится в печати, список которых приводится в конце автореферата.

з) ***Структура диссертации.***

Диссертация состоит из введения (Глава 1), четырех глав, заключения и списка литературы из 69 наименований. Общий объем работы составляет 130 страниц печатного текста.

Содержание работы

Во введении (Глава 1) обоснована актуальность темы и сделан краткий обзор по проблемам, затронутым в диссертации. Изложены практическая ценность и краткое содержание работы.

Во второй главе диссертации рассматриваются спиновые модели сформулированные на языке Ферми-операторов..

В §2.1 рассматривается модель Уймина-Лая-Сазерлэнда для спина *1* в терминах Ферми-полей. В связи с этим построена представление алгебры ***su(2)*** спина *1* в кольце операторов рождения и уничтожения двух сортов фермионов:

$$S^+ = (1-n_1)c_2 + (1-n_2)c_1^+$$

$$S^+ = (1-n_2)c_1 + (1-n_1)c_2^+$$

$$S = n_1 - n_2$$

Показано, что имеет место $F \otimes F = V \oplus \ker C$, где V пространство представления спина *1*, а ***kerC*** ядро оператора Казимира.

Построены операторы Хаббарда и Лакса в терминах ферми-операторов, написаны градуированные соотношения Янга-Бэкстера, получен гамильтониан модели в фермионном представлении.

В §2.2 результаты предыдущего параграфа обобщены на случай произвольных спинов, указан способ построения представлений ***su(2)*** в терминах фермионных операторов для любого спина, найдены операторы Хаббарда и полученные общие соотношения проиллюстрированы на примере спинов меньших или равных *7/2*.

В §2.3 построена спиновая модель Уймина-Лая-Сазерлэнда произвольного спина, получено явное выражение для гамильтониана модели.

В §2.3 рассмотрена модель Уймина-Лая-Сазерлэнда спина 3/2.

В §2.4 методом анзатца Бете найдены собственные значения и

собственные векторы трансфер-матрицы модели Уймина-Лая-Сазерлэнда спина *1*.

В третьей главе рассмотрена некомпактная спиновая модель Гейзенберга со спинами реализующими бесконечномерные представления алгебр ***sl(2)*** и $sl_q(2)$.

В §3.1 построена бесконечномерное представление алгебры ***sl(2)*** в пространстве полиномов, из соотношений Янга-Бэкстера получено рекурентное соотношение для собственных значений ***R***-матрицы вида:

$$R_n(u) = -R_{n-1}(u)\frac{u+n-1+l_1+l_2}{-u+n-1+l_1+l_2},$$

решением которого является:

$$R_n(u) = (-1)^n R_0(u)\prod_{k=1}^{n}\frac{u+k-1+l_1+l_2}{-u+k-1+l_1+l_2}.$$

Универсальная (сплетающая два представления произвольного спина) ***R***-матрица представлена в виде интегрального оператора. Найдено выражение для ядра этого оператора.

В §3.2 рассмотрена цепочка Гейзенберга со спинами реализующими бесконечномерное представление алгебры $sl_q(2)$. По аналогии с недефомированным случаем, построено представление алгебры $sl_q(2)$ в пространстве полиномов.

В §3.3 из соотношений Янга-Бэкстера для собственных значений универсального ***R***-оператора найдено следующее рекурентное соотношение:

$$R_n = -R_{n-1}\frac{[u+n-1+l_1+l_2]_q}{[-u+n-1+l_1+l_2]_q},$$

решение которого является прямым обобщением соответсвующего выражения для недеформированного случая:

$$R_n = (-1)^n R_0\prod_{k=1}^{n}\frac{[u+k-1+l_1+l_2]_q}{[-u+k-1+l_1+l_2]_q},$$

где $\left[a\right]_q = \dfrac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$.

В §3.4 полученные общие формулы применены для нахождения *R*-матриц в некоторых важных частных случаев.

В §3.5 универсальный *R*-оператор представлен в виде интегрального оператора и получено выражение для интегрального ядра.

В §3.5 понятие бета функциий Эйлера обобщено на деформированный случай.

В четвертой главе методом чередующихся уравнений Янга-Бэкстера обобщена анизотропная (*XYZ*) модель Гейзенберга с чередующимся расположением R-матриц.

В §4.1 даны основные определения испольуемого метода.

В §4.2 из соотношений Янга-Бэкстера найдена R-матрица модели и она параметризована элиптическими функциями Якоби.

В §4.3 найдены трансфер-матрица и матрица монодромии модели.

В §4.4 найден гамильтониан модели.

В заключении представлены основные результаты работы:

1. Построено локальное преобразование для перехода от спиновых операторов к операторам рождения и уничтожения фермионов. Построены фермионные модели Уймина-Лая-Сазерлэнда спинов 1 и 3/2. Полученные результаты обобщены на произвольный спин.
2. Методом алгебраического анзатца Бете найдены собственные вектора и значения трансфер-матрицы модели Уймина-Лая-Сазерлэнда спина *1*.
3. Рассмотрена некомпактная модель Гейзенберга со спинами, образующими бесконечномерное представление алгебр *sl(2)* и $sl_q(2)$. Для обоих случаев универсальный R-оператор представлен в виде интегрального оператора, действующего в функциональном пространстве и найдено его ядро.
4. Методом чередующихся уравнений Янга-Бэкстера продемонстрирована интегрируемость чередующейся *XYZ* модели Гейзенберга. Получены трансфер-матрица, матрица монодромии и гамильтониан этой модели. Гамильтониан модели содержит члены соответсвующие взаимодействию ближайщах соседей, а также члены имеющие топологический характер, ответственные за взаимодействие со следующим за ближайщим соседом.

Литература

[1] W. Heisenberg *Z. Phys 49 (1928) 619.*
H. Bethe *Z. Phys 71 (1931) 205.*

[2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura *Phys.Rev.Lett. 19 (1967) 1095-1097.*

[3] P. D. Lax *Comm. Pure Appl. Math. 21 (1968) 467-490.*

[4] Захаров В. Е., Шабат А. Б. *ЖЭТФ 61 (1971) 118-134.*

[5] Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. ***Функц. анализ и его приложения (1971) т. 5***.

[6] Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. ***Функц. анализ и его приложения т. 5*** (1971) 18-27.

[7] V. Korepin, N. Bogoliubov, A. Izergin Quantum invers scattering method and correlation functions (Cambridge Univ. Press 1993).

[8] E. K. Sklyanin, *J. Phys. A 21 (1988) 2375*; Nankai Lectures in Math. Phys., Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory, Singapore: WS, 1992, pp. 63-97.

[9] C.N.Yang - *Phys.Rev. 168 (1968) 1920.*

[10] A. B. Zamolodchikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz., 79 (1980) 641.*

[11] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Ann. Phys. (N.Y.) 120 (1979) 253.*

[12] E. K. Sklyanin "Bäcklund transformations and Baxter's *Q*-operator" nlin.SI/0009009.

[13] A. Arnaudon, A. Sedrakyan, T. Sedrakyan, P. Sorba, *Lett. Math. Phys. 58 (2001) 209-222*

[14] D. Karakhanyan, R. Kirschner and M. Mirumyan *Nucl.Phys. B (2002)* in press; nlin.SI/0111032 .

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. D. Arnaudon, D. Karakhanyan, M. Mirumyan, A. Sedrakyan and P. Sorba *J.Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 2353-2359.*
2. J. Ambjorn, D. Karakhanyan, M. Mirumyan and A. Sedrakyan Nucl. Phys. *B 599 (2001) 547-560.*
3. М. Мирумян "Модель Уйимна-Лая-Сазерлэнда спина 3/2 в терминах фермионных операторов рождения и уничтожения" *Известия НАН Армении т.37, 4 (2002)*
4. М. Мирумян " Фермионная модель Уймина-лая-Сазерлэнда спина 1" *Препринат ЕрФИ 1576(1)* 2002

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունը նվիրված է դաշտի քվանտային տեսության և վիճակագրական ֆիզիկայի ճշգրիտ լուծվող նոր մոդելների կառուցման և ուսումնասիրման խնդրին: Չնայած տեսական ֆիզիկայում մոտավոր մեթոդների իսկայական հաջողություններին՝ ժամանակակից տեսական և մաթեմատիկական ֆիզիկայում ինտեգրվող (ճշգրիտ լուծվող) համակարգերի տեսությունն ունի իր ուրույն տեղը: Այն բոլոր խնդիրներում, որտեղ առաջնային հետաքրքրություն են ներկայացնում ուսումնասիրվող համակարգի ոչպերտուրբատիվ (այսինքն գրգռումների տեսությունով չնկարագրվող), հատկություններն անփոխարինելի են ճշգրիտ մեթոդները: Այդ իսկ պատճառով ինտեգրվող մոդելները իսկայական նշանակություն ունեն ժամանակակից տեսական ֆիզիկայում: Մյուս կողմից ունենալով ճշգրիտ մեթոդներով ստացված արդյունքներ՝ մենք կարող ենք այդ արդյունքների հիման վրա ավելի բարդ մոդելների համար զարգացնել մոտավոր մեթոդներ: Ինտեգրվող համակարգերի նկատմամբ նկատվող հետաքրքրության աճը պայմանավորված է ոչ միայն նրանց մաթեմատիկական տեսակետից հետաքրքիր լինելով, այլ նաև նրանց բազմազան ֆիզիկական կիրառությունների թվի աճով:

Ատենախոսությունում գտնված է լոկալ ձևափոխություն սպինային *su(2)* հանրահաշվի գեներատորներից ֆերմիոնների ծնման և ոչնչացման օպերատորներին և հակառակ անցնելու համար: Կառուցված է Ույմին-Լայ-Սազերլենդի մոդելը *1* և *3/2*

սպինների համար: Բետեի հանրահաշվական տեղադրման (անզացի) մեթոդով գտնված են Բետեի սեփական վեկտորները և համակարգի էներգետիկ սպեկտրը, ինչպես նաև մոդելի համիլտոնիանը: Գտնված է Բետեի տրանսցենդենտ հավասարումների համապատասխան համակարգը: Ստացված արդյունքները ընդհանրացված են կամայական սպինի համար: Ցույց է տրված, որ կամայական սպինի Ույմին-Լայ-Սազերլենդի մոդելն համընկնում է սուպերսիմետրիկ *t-J*-ի մոդելի հետ:

Կառուցված են Հեյզենբերգի *XXX* և *XXZ* շղթաները, որոնց հիմքում ընկած *R*-մատրիցաները համապատասխանաբար Յանգ-Բեքսթերի հավասարումների *sl(2)* և $sl_q(2)$ հանրահաշիվների նկատմամբ համաչափ լուծումներ են՝ ոչ կոմպակտ ներկայացումների համար: Կառուցված են *sl(2)* և $sl_q(2)$ հանրահաշիվների անվերջ չափանի ներկայացումները բազմանդամների տարածությունում, իսկ $sl_q(2)$ քվանտային խմբի համար կառուցված է նաև կոարտադրյալը: Երկու դեպքում էլ մոդելների ունիվերսալ *R*-օպերատորները ներկայացված են ինտեգրալ օպերատորների տեսքով և համապատասխան Յանգ-Բեքսթերի հավասարումներից ունիվերսալ *R*-օպերատորների ինտեգրալ միջուկների համար ստացված են համապատասխանաբար դիֆերենցիալ և վերջավոր տարբերություններով հավասարումներ, որոնք լուծված են: Հայտնի էյլերի բետա ինտեգրալները ընդհանրացված են քվանտային դեպքի համար: Յանգ-Բեքսթերի փոխհաջորդող հավասարումների մոթոդի միջոցով կառուցված է Հեյզենբերգի անիզոտրոպ *XYZ* աստիճանաձև մոդելը: Գտնված է այդ մոդելի համիլտոնիանը, որում երեք մոտակա հարևանների փոխազդեցությունն ունի տոպոլոգիական բնույթ: Ցույց է տրված, որ գլանային համաչափության վերականգնման սահմանում ստացված համիլտոնիանն համընկնում է մինչ այդ ուսումնասիրված Հեյզենբերգի փոխհաջորդող *XXZ* աստիճանաձև մոդելի համիլտոնիանի հետ: